# Matrices y solución por reducción de Gauss-Jordan

En esta clase se presentan las matrices como representación abreviada de un sistema de ecuaciones lineales y se muestra que operar entre filas o renglones de números es equivalente a operar término a término entre ecuaciones. Con base en eso se presenta el segundo algoritmo de solución de sistemas de ecuaciones que lleva a matrices escalonadas y reducidas por filas.

## Matrices

Si se examina el proceso de E.G. que se hizo en la clase previa se nota que ninguna de las fases altera a las variables en su orden definido, ni a los signos + o =. Los único que realmente cambia con cada paso son los coeficientes y los términos independientes.

Esto nos motiva a introducir el concepto de matriz como una forma de representar abreviadamente a los sistemas de ecuaciones lineales.

Considere el sistema

Para evitar escribir innecesariamente en el proceso de solución, lo podemos representar por una matriz aumentada o extendida, que es un arreglo rectangular que incluye únicamente los números realmente importantes para el proceso de eliminación o reducción: los coeficientes y los términos independientes:

se llama “Matriz Aumentada” del sistema. Consta de dos submatrices:

: Matriz de coeficientes.   
: Matriz columna (o vector) de términos independientes.

Haciendo operaciones sobre la matriz aumentada por filas, se pueden lograr procesos equivalentes de eliminación que se harían más pesados con la simbología completa del sistema de ecuaciones lineales.

**Notación de matrices:**

A los elementos de una matriz se les simboliza de diversas formas:

Si la matriz tiene filas y columnas, y nos queremos referir al elemento de la fila y la columna , lo representaremos como ; el primer índice siempre indicará la fila y el segundo la columna.   
  
Otras formas de referirse a este mismo elemento son

Al decir estamos resumiendo que la matriz tiene elementos de la forma , en los cuales el primer índice puede variar desde 1 hasta (el número de filas), mientras que el segundo índice puede variar desde 1 hasta (el número de columnas).

Con respecto a las ecuaciones, si es una matriz de coeficientes de un sistema, el primer índice señala la fila horizontal de la matriz (correspondiente a la ecuación del sistema) donde está el coeficiente o el término respectivo. El segundo índice, , indica a qué variable está multiplicando ese coeficiente (o sea en qué columna se encuentra).

Si la matriz es aumentada, la última columna no representa coeficientes de la última variable, sino a los términos independientes.

**Ejemplo**

El elemento de la fila o renglón 3 y de la columna 7 de una matriz puede ser representado como

**Filas de una matriz**

La fila de una matriz se puede representar de esta forma:

Representa la fila de la matriz .   
Literalmente:   
Índice fila: “”.   
Índice columna: comodín “” que representa todas las columnas.   
Estamos seleccionando los elementos de todas las columnas que están en la fila .

**Columnas de una matriz**

Una columna de una matriz se puede representar de esta forma:

Representa la columna de la matriz .

Literalmente:   
Índice columna: “”.   
Índice fila: comodín “” que representa todas las filas.   
Estamos seleccionando los elementos de todas las filas que están en la columna .

## Matrices como filas de columnas o columnas de filas.

Con todo lo anterior, Entonces puedo representar como una columna de filas:

También se puede representar esa matriz como una fila de columnas:

Note que ambas son la misma:

Con todo esto, ya podemos hacer E.G. o R.G.J. haciendo operaciones similares entre filas de matrices.

## Reducción de Gauss-Jordan

El otro algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones se llama “reducción de Gauss-Jordan”. Este algoritmo lleva la eliminación hasta sus últimas consecuencias y se convierte en más que un método de solución de sistemas: se vuelve una potentísima herramienta de análisis lineal sobre sistemas de ecuaciones, vectores, matrices, y otros objetos matemáticos lineales.

El objetivo del algoritmo hacer unos pasos adicionales a la eliminación gaussiana, que llevan la matriz que representa al sistema desde una forma escalonada por filas, hasta la forma escalonada y reducida por filas. Esta se caracteriza por lo siguiente:

**Forma escalonada y reducida por filas**

Para que una matriz esté en forma **escalonada y reducida** por filas,

1. Debe estar en **forma escalonada por filas**.
2. Los pivotes deben ser unitarios (sus coeficientes son 1).
3. Se deben eliminar también los términos encima de cada pivote.

El algoritmo para llevar la matriz a esta forma consta entonces de tres fases, que se describen a continuación.

**Algoritmo de reducción de Gauss-Jordan**

Fase 1. Hacer eliminación gaussiana (la matriz debe quedar en forma escalonada por filas).

Fase 2. Hacer todos los pivotes unitarios, dividiendo cada ecuación no nula por el coeficiente de su pivote (de ser necesario).

Fase 3. Procediendo de izquierda a derecha, eliminar también los términos no nulos que haya encima de los pivotes, usando el mismo tipo de operaciones de la etapa dos (eliminación) del algoritmo de eliminación.  
  
**Ejemplo**

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando Reducción de Gauss-Jordan (R.G.J.)

Se representa matricialmente así:

Fase 1. Hacer eliminación gaussiana:

Primero eliminamos bajo el pivote de la posición (1,1):

Luego se elimina bajo el pivote de la posición (2,3).

Ya está lista la fase de eliminación gaussiana. Ahora siguen las dos fases adicionales.

Fase 2. Hacer pivotes unitarios.

Ahora sólo queda realizar la última fase.

Fase 3. Eliminar sobre los pivotes.

Como sólo hay un pivote con elementos no nulos encima, basta eliminar sobre el pivote de la posición (2,3):

Ya la matriz queda en forma escalonada y reducida:

* Si quedan filas de ceros, quedan todas abajo.
* Los pivotes de filas superiores siempre quedan más a la izquierda que los pivotes de filas inferiores.
* El primer elemento no nulo de cada fila es 1 (pivote con valor unitario).
* Si una columna tiene pivote (columna básica), todos los demás elementos de esa columna tienen que ser cero (reducida).

El sistema anterior significa:

Nótese que para resolver basta encontrar las variables pivotales “enviando” al otro lado de la igualdad todos los otros términos:

El vector de soluciones queda:

Nótese que quedan dos variables libres (*free*): y , que multiplican a sendos vectores linealmente independientes entre sí, y .

Esta es la ecuación paramétrica de un plano en cuatro dimensiones, en la cual hay dos variables libres o parámetros y que son respectivamente y .

Las variables dependientes o variables pivote, o ligadas (también llamadas básicas) son y .

El conjunto solución es

Note que cuando la matriz está en forma escalonada y reducida, no hay que hacer sustitución regresiva, porque al eliminar los términos encima de cada pivote, se hace innecesario reemplazarlos en las ecuaciones superiores.

**Ejercicio**

Resuelva el sistema

**Solución**

Una matriz que representa al sistema es:

Al hacer la fase 1, de eliminación gaussiana, se obtiene:

Para hacer la fase 2, se hacen unitarios los pivotes con

Sólo con la forma escalonada, ya se ve que el sistema tiene solución (es consistente) porque **no hay** ecuaciones contradictorias de la forma “(Cero)=(NúmeroDistintoDeCero)” o “Cero diferente de cero”. Más aún, como hay tres pivotes, habrá tres variables dependientes, ninguna quedará libre y habrá solución única.

Terminamos el proceso de reducción de Gauss-Jordan con la fase tres, eliminando términos sobre los pivotes.   
Comenzamos eliminando encima del pivote 2.

Para eliminar sobre el segundo pivote, se hace

Por último, para eliminar el 2 encima del tercer pivote, se hace :

La matriz anterior equivale al sistema:

Note que la solución es inmediata; el conjunto solución es:

que es un único punto en el espacio tridimensional.

**Ejercicio**

Encuentre la solución del sistema siguiente usando reducción de Gauss-Jordan:

**Solución**

Resulta que de las 5 variables que hay en total, 3 de ellas son variables pivote o dependientes: y . Esas variables se encuentran en términos de las otras 2 variables que quedan libres o independientes: y .

Al resolver encuentra que:

Al escribir el vector de solución general obtiene:

Al escribir esa solución en forma de combinación lineal se puede identificar qué tipo de conjunto solución es:

Resulta claro que esta solución representa un plano en

Puede encontrar más ejercicios en los talleres de repaso 2 a 4.